An Introduction to Probability Theory and Its Applications

WILLIAM FELLER

VOLUME I

目 次

第 1 章 The Nature of Probability Theory **3**
1.1 The Background 3

第 2 章 The Sample Space **5**
2.1 The Empirical Backgound 5

第 3 章 Elements of Combibatorial Analysis **7**
3.1 Preliminaries 7

第 4 章 Fluctuations in Coin Tossing and Random Walks **9**
4.1 General Orientation. The Reflection Principle 9
4.2 Random Walks: Basic Notions and Notations 11
4.3 The Main Lemma 12
4.4 Last Visit and Long Leads 13
4.5 Changes of Sign 15
4.6 Maxima and First Passages 16
4.7 Duality. Position of Maxima 17
4.8 An Equidistribution Theorem 18
4.9 Problems for Solution 19

第1章　The Nature of Probability Theory

1.1　The Background

第2章　The Sample Space

2.1　The Empirical Backgound

第3章　Elements of Combibatorial Analysis

3.1　Preliminaries

第4章　Fluctuations in Coin Tossing and Random Walks

この章には2つの目的がある．第1にきわめて簡単な方法で、応用の広い重要な結果を導くこと．第2に、予想もしないばかりか、直感や常識を覆すような理論的な結果を紹介する．この結果は、大数の法則がもつ意味が広く誤解されていることを明らかにしている．

4.1　General Orientation. The Reflection Principle

p個の$+1$、q個の-1からなる$n=p+q$の記号$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$を考える．部分和$s_k=\epsilon_1+\cdots+\epsilon_k$は$k$回目でプラスとマイナスの差を表している．それから、

$$s_k - s_{k-1} = \epsilon_k = \pm 1, \quad s_0 = 0, \quad s_n = p - q \tag{4.1}$$

となる．もしϵ_iのうちp個が正、q個が負であれば

$$x = p + q, \quad q = p - q \tag{4.2}$$

である．原点から任意の点(x,y)へのpathの数は、

$$N_{x,y} = \begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

で与えられる．

Definition 4.1 *Let $n>0$ and x be integers. A path $(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ from the origin to the point (n,x) is a polygonal line whose vertices have abscissas $0,1,\cdots,n$ and ordinates $s_1,\cdots,s_n$ satisfying (4.1) with $s_n=x$.*

いま点$A=(a,\alpha)$と点$B=(b,\beta)$を実軸上方になる整数点とする．$b>a\leq 0, \alpha>0, \beta>0$．点$A$び$x$軸に関する鏡像点とは、点$A'=(a,-\alpha)$のことである．

Lemma 4.1 (Reflection principle) *The number of paths from A to B which touch or cross the x-axis equals the number of all paths from A' to B.*

Proof. まず$(s_a=\alpha,\cdots,s_b=\beta)$となるようなpathを考える．また、$t$を$s_a>0,\cdots,s_{t-1}>0, s_t=0$となるような時間とする．このとき、$(-s_a,-s_{a+1},\cdots,-s_{t-1},s_t=0,s_{t+1},\cdots,s_b)$は$A'$から$B$へのpathとなっている．このとき、折れ線$AT, A'T$は鏡像関係にあり、さらに1対1の対応がある．よって、題意が示された．□

Theorem 4.1 (The ballot theorem) *Let n and x be positive intergers. There are exactly $\frac{x}{n}N_{x,y}$ paths $(s_1, \cdots, c_n)$ from the origin to the point (n, x) such that $s_1 > 0, \cdots, s_n > 0$.*

Proof.$(1,1)$ から (n,x) への path のうち横軸に横切りも接しもしない数が求める path の数である．Lemma4.1 より求める path の数は

$$N_{x-1,y-1} - N_{x-1,y+1} = \frac{y}{x}N_{x,y} \tag{4.4}$$

となる．□

4.2 Random Walks: Basic Notions and Notations

Random Walk

Path$\{s_1, \cdots, s_N\}$ は x 軸を時間軸とする Random Walk の時間ー空間図を表している．この標本空間は 2^N の path を集めたものと考え、それぞれの path に対して 2^{-N} の確率を与えるとよい．

Notations

個々のステップを $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots$ と書き、粒子の位置を $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \cdots$ で表す．したがって、

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n, \quad \mathbf{S}_0 = 0 \tag{4.5}$$

となる．
$\{\mathbf{S}_k = r\}$ となる確率 $p_{n,r}$ は (4.3) より

$$p_{n,r} = \begin{pmatrix} n \\ \frac{n+r}{2} \end{pmatrix} 2^{-n} \tag{4.6}$$

となる．また、時刻 k で $\mathbf{S}_k = 0$ となる確率 u_{2n} は

$$u_{2n} = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} 2^{-2n} \tag{4.7}$$

となる（$\mathbf{S}_k = 0$ となるには $k = 2n$ でなければならない．) スターリングの公式を用いると

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

となる．さらに、時刻 $2n$ で初めて元に戻ってくる確率 f_{2n} とする．つまり、

$$\mathbf{S}_1 \neq 0, \cdots, \mathbf{S}_{2n-1} \neq 0 \quad but \quad \mathbf{S}_{2n} = 0. \tag{4.8}$$

u_{2n} を f_{2k} を使って表すと、

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \cdots + f_{2n} u_0 \tag{4.9}$$

となる．

The normal approximation (Central Limit Theorem)

$$\Pr\{\mathbf{S}_n > x\sqrt{n}\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \tag{4.10}$$

4.3 The Main Lemma

Lemma 4.2 *The probability that no return to the origin occurs up to and including epoch $2n$ is the same as the probability that a return occurs at epoch $2n$. In symbols,*

$$\Pr\{\mathbf{S}_1 \neq 0, \cdots, \mathbf{S}_{2n} \neq 0\} = \Pr\{\mathbf{S}_{2n} = 0\} = u_{2n}. \tag{4.11}$$

Remark 4.1 *Lemma*4.2 は別の表現が可能である．

$$\Pr\{\mathbf{S}_1 \geq 0, \cdots, \mathbf{S}_{2n} \geq 0\} = u_{2n} \tag{4.12}$$

Proof.

$$\Pr\{\mathbf{S}_1 > 0, \cdots, \mathbf{S}_{2n} > 0\} = \sum_{r=1}^{n} \Pr\{\mathbf{S}_1 > 0, \cdots, \mathbf{S}_{2n-1} > 0, \mathbf{S}_{2n} = 2r\}$$

The ballot theorem より、

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{S}_1 > 0, \cdots, \mathbf{S}_{2n-1} > 0, \mathbf{S}_{2n} = 2r\} &= N_{2n-1,2r-1}2^{-2n} - N_{2n-1,2r+1}2^{-2n} \\ &= \frac{1}{2}(p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1}) \end{aligned}$$

となる．$p_{2n-1,2n+1} = 0$ に注意すると、

$$\Pr\{\mathbf{S}_1 > 0, \cdots, \mathbf{S}_{2n} > 0\} = \frac{1}{2}p_{2n-1,1} = \frac{1}{2}u_{2n}$$

となる．□

Lemma 4.3 *The probability that the first return to the origin occurs at epoch $2n$ is given by*

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} \tag{4.13}$$

or

$$f_{2n} = \frac{1}{2n-1}u_{2n} \tag{4.14}$$

Proof.(4.13) は Lemma4.2 より明らか．(4.14) も計算すればよい．□

4.4 Last Visit and Long Leads

この節では、ランダム・ウォークに関する揺らぎの解析を行う．その結果は驚くべきものである．非常に長いコイン投げではプレイヤーが勝っている時間はだいたいその半分ぐらいだという広く信じられている結果は間違っていることがわかるだろう．

Theorem 4.2 (Arc sine law for last visits) *The probability that up to and including epoch $2n$ the last visit to the origin occurs at epoch $2k$ is given by*

$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k}. \tag{4.15}$$

Proof. $\mathbf{S}_{2k} = 0$ で $\mathbf{S}_{2K+1} \neq 0, \cdots, \mathbf{S}_{2n} \neq 0$ という path に関心がある．$\mathbf{S}_{2k} = 0$ となる path の数は $2^{2k}u_{2k}$ である．$(2k, 0)$ を原点とみなして $\mathbf{S}_{2K+1} \neq 0, \cdots, \mathbf{S}_{2n} \neq 0$ となる path の数は $2^{2n-2k}u_{2n-sk}$ となる．したがって、求める確率は $2^{2k}u_{2k}2^{2n-2k}u_{2n-2k}/2^n$ となる．□

Remark 4.2 逆正弦関数は (4.15) の非常によい近似を与えるので、点 $2k$ に重み (4.15) を与える確率密度関数はオーダー n の離散逆正弦分布と呼ばれている．

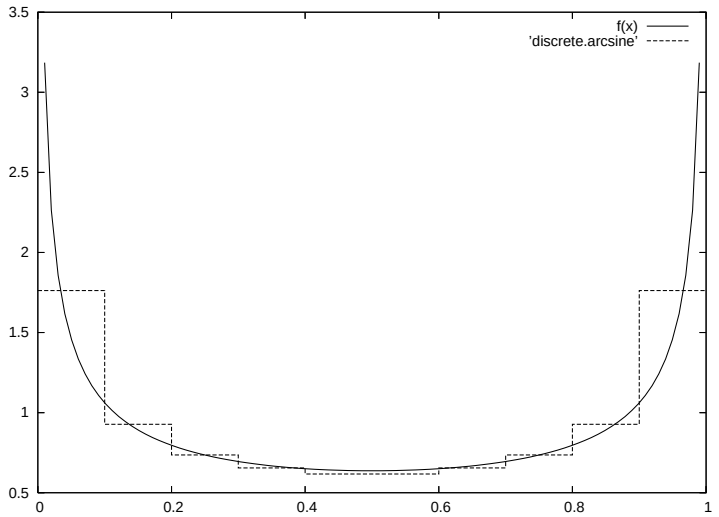

図 4.1: $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ と $\alpha_{2k,2n}$ のグラフ．ただし、$\alpha_{2k,2n}$ の縦軸は n 倍し、横軸は $\dfrac{k}{n}$ とした．$(n = 10)$

Theorem 4.3 (Discrete arc sine law for sojourn times) *The probability that in the time interval from 0 to $2n$ the particle spends $2k$ time units on the positive side and $2n-2k$ time units on the negative side equals last visit to $\alpha_{2k,2n}$.*

Proof. 長さ $2n$ のうち $2k$ だけ正にいる確率を $b_{2k,2n}$ と書く．Lemma4.2 より $b_{2\nu,2\nu} = b_{0,2\nu} = u_{2n}$ となる．さらに、

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}b_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}b_{2k,2n-2r} \tag{4.16}$$

となる．数学的帰納法により、$b_{2k,2n} = \alpha_{2k,2\nu}$ となる．□

Corollary 4.1 *If* $0 < x < 1$, *the probability that* $\leq xn$ *time units are spent on the positive side and* $\geq (1-x)n$ *on the negative side tends to* $\dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$ *as* $n \to \infty$.

4.5 Changes of Sign

非常に長いコイン投げのゲームでは、リードが変わる回数はゲームの時間に比例して増えると思うかもしれないが、これは間違っている．この後で、n 回の試みでリードが変わる回数は $\sqrt{n}$ で増えることを示す．

Definition 4.2 *A change of sign is said to occure at epoch n if $\mathbf{S}_{n-1}$ and $\mathbf{S}_{n+1}$ are of opposite signs, that is, if the pathe crosses the axis.*

Theorem 4.4 *The probability $\xi_{r,2n+1}$ that up to epoch $2n+1$ there occur exactly r changes of sign equals $2p_{2n+1,2r+1}$. In other words*

$$\xi_{r,2n+1} = 2\Pr\{\mathbf{S}_{2n+1} = 2r+1\} \tag{4.17}$$

Proof. 最初の一歩が $(1,1)$ に行くとする（$(1,-1)$ でも同様にできる．）$(1,1)$ を原点にし直すと、符号が変わることは新たに作られた座標において -2 階に触れるまたは横切ることを意味する．以下、座標は新しく作られたものを考える．

$r=0$ のときをまず考える．第 1 節の reflection principle より、$(0,0)$ から $(2n,2k)$ の path の中で -2 階に触れる path の数は、$(0,0)$ から $(2n,2k+4)$ への path の数に等しい．したがって、-2 階に触れずに $(2n,2k)$ に行く確率は $p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}$ に等しい．したがって、(4.6) より

$$\xi_{0,2n+1} = \sum_{k=0}^{n}(p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}) = p_{2n,0} + p_{2n,2} = 2p_{2n+1,1}$$

となる．

$r=1$ のとき、-1 階を時刻 $2\nu-1$ で横切る path は、$(0,0)$ から $(2\nu,-2)$ への path と点 $(2\nu,-2)$ からの長さ $2n-2\nu$ の path に分けることができる．後ろの部分は $r=0$ の結果を適用することができる．よって、点 $(2\nu,-2)$ から始まる長さ $2n-2\nu$ の path で -1 階を横切らない path の数は、点 $(2\nu,-2)$ からの $(2n+1,-3)$ への path の数に等しい．すべての $\nu(=1,2,\cdots,n)$ を考えれば、-1 階を一回だけ横切る path の数は $(0,0)$ から $(2n+1,-3)$ への path の数に等しい、つまり、$2^{2n+1}p_{2n+1,3}$ ．

Theorem 4.5 (Normal approximation) *The probability that fewer than $x\sqrt{n}$ changes of sign occur before epoch n tends to $2\mathcal{N}(2x)-1$ as $n\to\infty$.*

4.6 Maxima and First Passages

Definition 4.3 (Maximum of path) *Path remains below the line $x = r$, that is, path satisfying the condition*

$$\mathbf{S}_0 < r, \quad \mathbf{S}_1 < r, \cdots, \mathbf{S}_n < r. \tag{4.18}$$

We say in this case that the maximum of the path is $< r$.

Lemma 4.4 *Let $k \leq r$. The probability that a path of length n leads to $A = (n, k)$ and has a maximum $\geq r$ equals $p_{n,2r-k} = \Pr\{\mathbf{S}_n = 2r - k\}$.*

Proof. $A = (n, k)$ とする ($k \leq r$) 0 から A への path で $x = r$ に触れるかまたは横切る path の数は、原点から $A' = (n, 2r - k)$ への path の数の等しい . □

Theorem 4.6 *The probability that the maximum of a path of length n equals $r \geq 0$ coincides with the positive member of the pair $p_{n,r}$ and $p_{n,r+1}$.*

Proof. $A = (n, k)$ に到着し、最大が r に等しい確率は、$p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k}$ で与えられる . 最大が r に等しい確率は $k \leq r$ について和をとればいいので、

$$\sum_{k \leq r} (p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k}) = p_{n,r} + p_{n,r+1}$$

となる . ただし、r と n の偶奇性が同じでなければ $p_{n,r} = 0$ とする . □

Definition 4.4 (First passage) *A first passage through the point $r > 0$ is said to take place at epoch n if*

$$\mathbf{S}_1 < r, \cdots, \mathbf{S}_{n-1} < r, \quad \mathbf{S}_n = r. \tag{4.19}$$

Theorem 4.7 *The probability $\varphi_{r,n}$ that the first passage through r occurs at epoch n is given by*

$$\varphi_{r,n} = \frac{1}{2} p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}]. \tag{4.20}$$

Proof. (4.19) となるには $A = (n - 1, r - 1)$ に到着し、その間の最大が $r - 1$ に等しく、かつ n 回目の試みで成功する場合である . よって、Lemma 4.4 より、その確率は $\frac{1}{2}[p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}]$ に等しい . □

Theorem 4.8 (Limit theorem for first passages) *For fixed t the probability that the first passage through r occurs before epoch tr^2 tends to*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = 2 \left[1 - \mathfrak{N}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right] \tag{4.21}$$

as $r \to \infty$, where $\mathfrak{N}$ is the normal distribution.

Theorem 4.9 *The probability that the rth return to the origin occurs at epoch n is given by the quantity $\varphi_{r,n-r}$.*

4.7 Duality. Position of Maxima

4.8 An Equidistribution Theorem

Theorem 4.10 *The number of paths of length* $2n$ *such that* $\mathbf{S}_{2n} = 0$ *and exactly* $2k$ *of its sides lie above the axis is independent of* k *and equal to* $2^{2n}u_{2n}/(n+1) = 2^{2n+1}f_{2n+2}$.

4.9 Problems for Solution