

28pTK-10 非定常カオスの特徴付ける Lyapunov 指数の新しい定義

早大理工 秋元琢磨, 新海創也, 相澤洋二

A New Aspect of the Lyapunov Exponent Characterizing a Non-stationary Chaos

Takuma Akimoto, Soya Shinkai and Yoji Aizawa

Department of Applied Physics, Advanced School of Science and Engineering,
Waseda University

不変測度が規格化できない、所謂、無限測度系では、観測関数の長時間平均は一定値に収束せず、ランダムになることがわかってきている。そのランダム性は、観測関数に依存して変わり、例えば、 $L^1(m)$ ¹関数であれば、スケールされた長時間平均が Mittag-Leffler 分布に収束する。

$$\Pr \left\{ \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \leq t \right\} \rightarrow P_{ML}(t) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

ここで、 a_n は、力学系によって一意に決まる単調増加する数列、 $P_{ML}(t)$ は Mittag Leffler 分布である。無限測度系では、軌道の初期値鋭敏性があるにもかかわらず、 $a_n = o(n)$ となるため、1次元写像の傾きが $L^1(m)$ であるならば、通常の Lyapunov 指数は 0 となる。

本研究では、このような力学系のカオスの特徴づけるために新しい Lyapunov 指数を提案する。具体的には、generalized Lyapunov 指数 $\lambda(a_n)$ を

$$\lambda(a_n) \equiv \left\langle \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{\infty} \ln |T'(T^k x)| \right\rangle,$$

と定義する。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均を表している。この generalized Lyapunov 指数は、数列 a_n に依存しており、 $a_n = n$ とすると、通常の Lyapunov 指数と一致する。この generalized Lyapunov 指数を用いると、カオスの分類を非定常カオスにまで拡張することができる。

1. **Extremely strong chaos** : $\lambda(n) = \infty$ and $\lambda(a_n) < \infty$ for $a_n = n^\alpha$ ($\alpha \geq 1$).
2. **Chaos** : $0 < \lambda(n) < \infty$.
3. **Non-stationary chaos** : $\lambda(n) = 0$ and $\lambda(a_n) > 0$ for $a_n = n^\alpha$ ($\alpha \leq 1$).

また、 $0 < \lambda(a_n) < \infty$ となるような a_n が存在するとき、 $(a_n, \lambda(a_n))$ を Lyapunov pair と呼ぶ。Lyapunov pair は、力学系の軌道の不安定性を特徴付けるものである。実際に、Lyapunov pair が $(n^\alpha, \lambda(n^\alpha))$ であれば、初期誤差は指数関数的ではなく stretched exponential 的に増大

$$\langle \Delta x(n) \rangle \sim \Delta x(0) \exp(\lambda(n^\alpha)n^\alpha)$$

し、 $(\ln n, \lambda(\ln n))$ であれば、初期誤差またはべき的に増大することになる。

$$\langle \Delta x(n) \rangle \sim \Delta x(0)n^{\lambda(\ln n)}$$

本講演では、変形ベルヌーイ写像、Boole 変換、log-Weibull 写像を用いて、generalized Lyapunov 指数を計算する。そして、flat critical points を持つ無限測度系では、Lyapunov pair における数列 a_n が return sequence でなく $a_n = n$ 、つまり、通常の chaos となることを示す。

¹不変測度 m に関する平均値が有限である関数。