

## 21aVD-4 非双曲ハミルトン系の再帰時間特性

早大理工 津川暁, 新海創也, 相澤洋二

Recurrence Properties induced by non-hyperbolicity in Hamiltonian Chaos

Satoru Tsugawa, Soya Shinkai and Yoji Aizawa

Department of Applied Physics, Advanced School of Science and Engineering,  
Waseda University

背景と目的 : 双曲性と呼ばれる強いカオスを仮定した写像力学系では、指数関数的緩和が生じる。しかし保存力学系では系の不安定性によりカオスが生じるが、トーラスと呼ばれる準周期軌道が相空間上に残ることが知られており (KAM 定理)、このトーラスとカオスの共存により双曲性が破られると考えられている。実際、トーラス・カオス共存系の数値実験では、指数関数的緩和ではなくべき関数的緩和や異常拡散が観測されている。これまで、双曲系カオスのエルゴード特性は理論的予想がなされている [1] が、非双曲系カオスのエルゴード特性は 1 次元写像の場合を除いてあまり調べられていない。

そこで本研究では、非双曲的ハミルトン系のスローダイナミクスを理解するために 2 次元面積保存写像のエルゴード特性を解析することを目的とする。ここでは、写像の例として変形 cat map を取り上げる。また、実際のハミルトン系としてマッシュルームビリヤード系を解析する。このビリヤード系では上半円領域からの脱出時間がべき関数的になることが示されている [2]。ここで、相空間上の第  $n$  脱出領域の構造からトーラス領域での臨界ローテーション数を無理数比に近づけたとき、最も外側のトーラスは標準写像における最終 KAM トーラスと類似した構造に近づくことが予想される。このとき、トーラスとカオスの境界領域の相空間上の構造を調べ、緩和のべき指数の変化を考察する。

解析 : 非双曲面積保存性を有する 2 次元写像として、以下で定義される変形 cat map を考える。

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n^B \\y_{n+1} &= x_n + y_n + y_n^B\end{aligned}\quad (1)$$

この写像の特徴は KAM トーラスは存在しないが、原点において非双曲構造があるため、スローダイナミクスが生じることである。この写像力学系のエルゴード特性として、リヤプノフ指数、相関関数、パワースペクトル、再帰時間分布を計算する。

マッシュルームビリヤード系では臨界ローテーション数を無理数に近づけるように長方形領域の比を変える。このビリヤード台で、トーラスの  $\varepsilon$  近傍に初期軌道を一様分布させたときの軌道が  $n$  回写像後に  $\varepsilon$  近傍に留まっている確率  $S(n)$  (Survival Probability) を数値計算によって求める。

結果 : 変形 cat map の原点近傍での Survival Probability は式 (1) を連続近似した微分方程式の解から次式のように予想され、数値計算の結果と一致した。

$$S(n) \sim n^{-\frac{4}{B-1}-1}$$

結果 : マッシュルームビリヤード系においては、トーラス領域の臨界ローテーション数を無理数比に近づけても長時間領域での緩和のべき指数は変化しなかった。

$$S(n) \sim n^{-1}$$

[1] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, (Springer-Verlag, 1970).

[2] T. Miyaguchi, *Phys Rev E* **75** 066215 (2007).